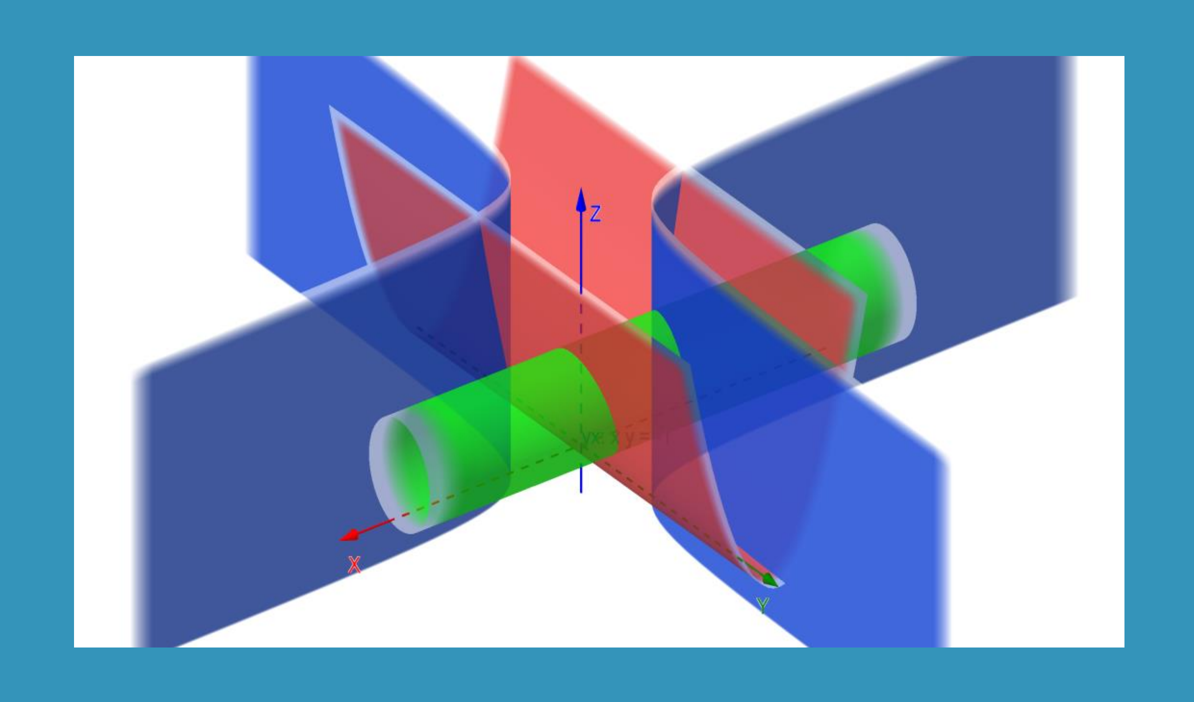
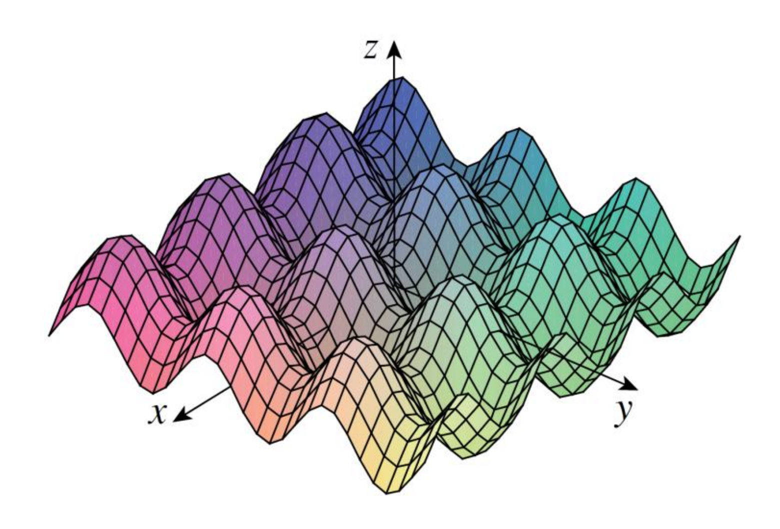




FUNCIONES REALES DE VARIABLE VECTORIAL

LÍMITES Y CONTINUIDAD DE FUNCIONES REALES DE VARIABLE VECTORIAL

¿Cómo visualizar la forma de las superficies montañosas sin necesidad de visualizar su gráfica en 3D?



Planos horizontales imaginarios

880
860
840
820

Superficie del relieve

Proyección de los cortes de cada plano

Curvas de nivel

Carretera
Localidad
Río

Mapa topográfico

Curvas de elevación constante sobre el nivel del mar

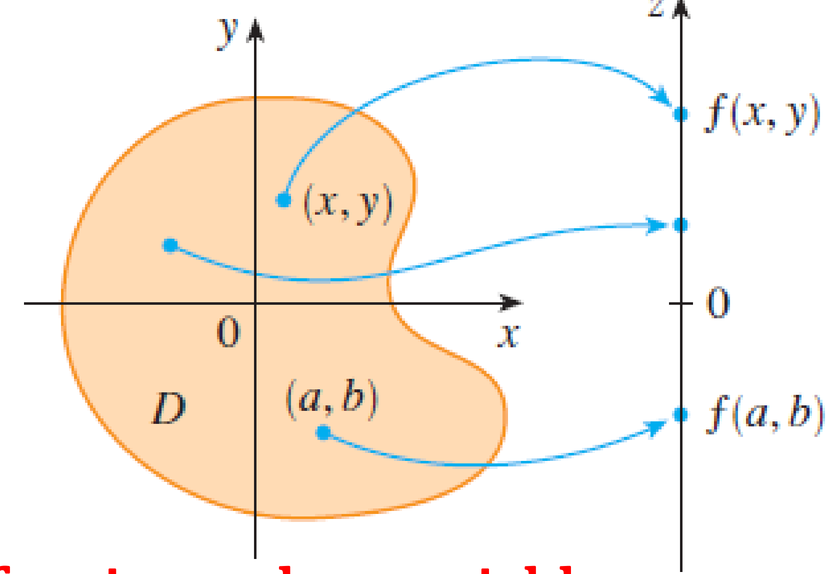
CONTENIDO

- Límites
- Continuidad
- Derivadas
- Vector gradiente
- Regla de la cadena

Funciones de dos variables

Definición. Una **función** f **de dos variables** es una regla que asigna a cada par ordenado de números reales $(x; y)$ de un conjunto D, un único número real que se denota con $f(x; y)$. El conjunto D es el **dominio** de f y su **rango** es el conjunto de valores que toma f, es decir,

$$\{f(x; y): (x; y) \in D\}$$



De manera análoga se puede definir para funciones de n variables

Dominio

Es el conjunto de todos los puntos para los que la ecuación esta definida

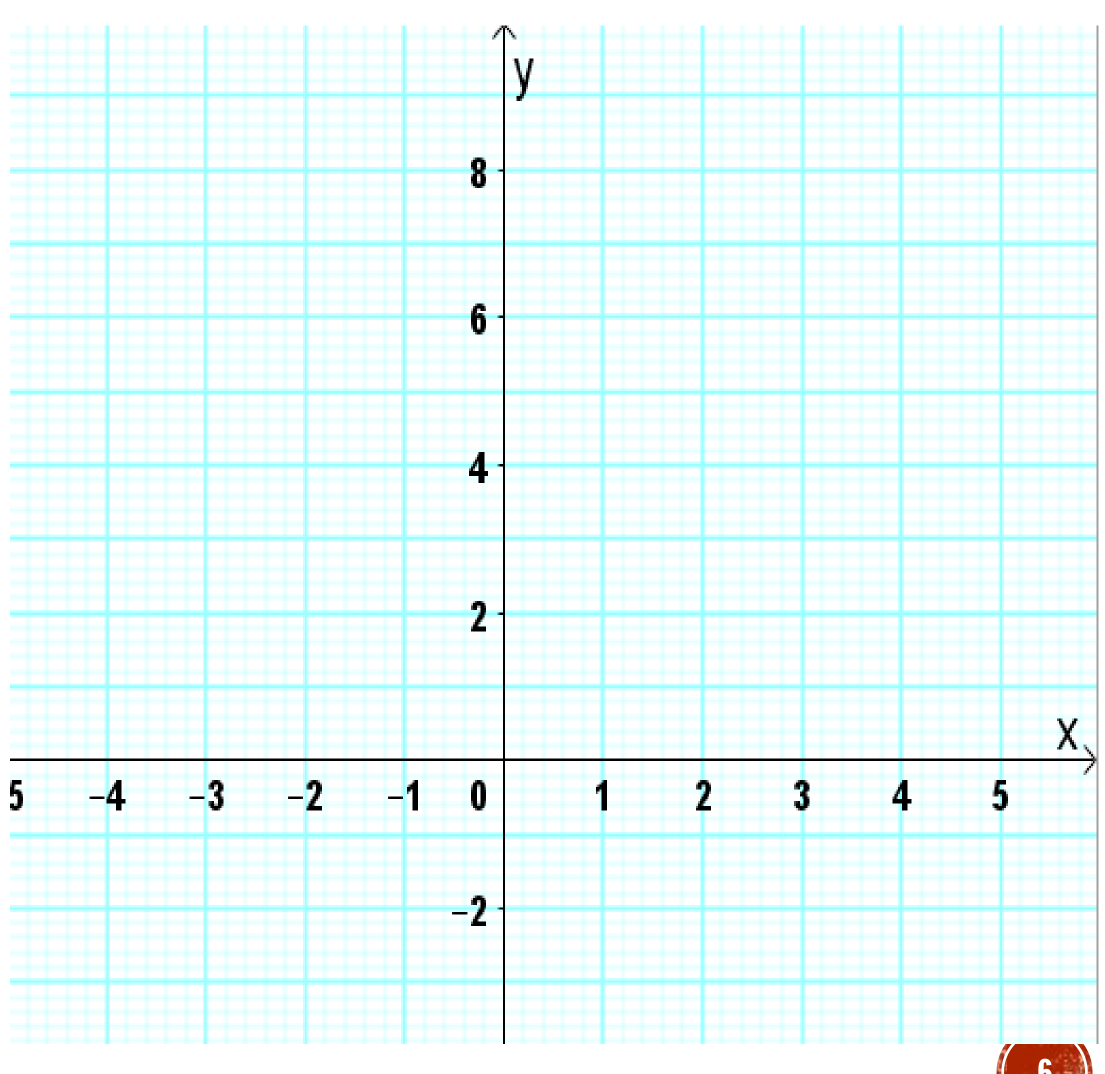
Determine el dominio de

- $f(x, y) = x^2 + y^2$
- $f(x, y) = \ln(xy)$
- $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2 - 9}$
- $f(x, y, z) = \sqrt{9 - x^2 - y^2 - z^2}$

Ejemplo 1. Determine en forma analítica el dominio de la función f. Luego esboce la gráfica de su dominio.

$$f(x; y) = \ln(9 - x^2 - y) + \sqrt{2y - x + 2}$$

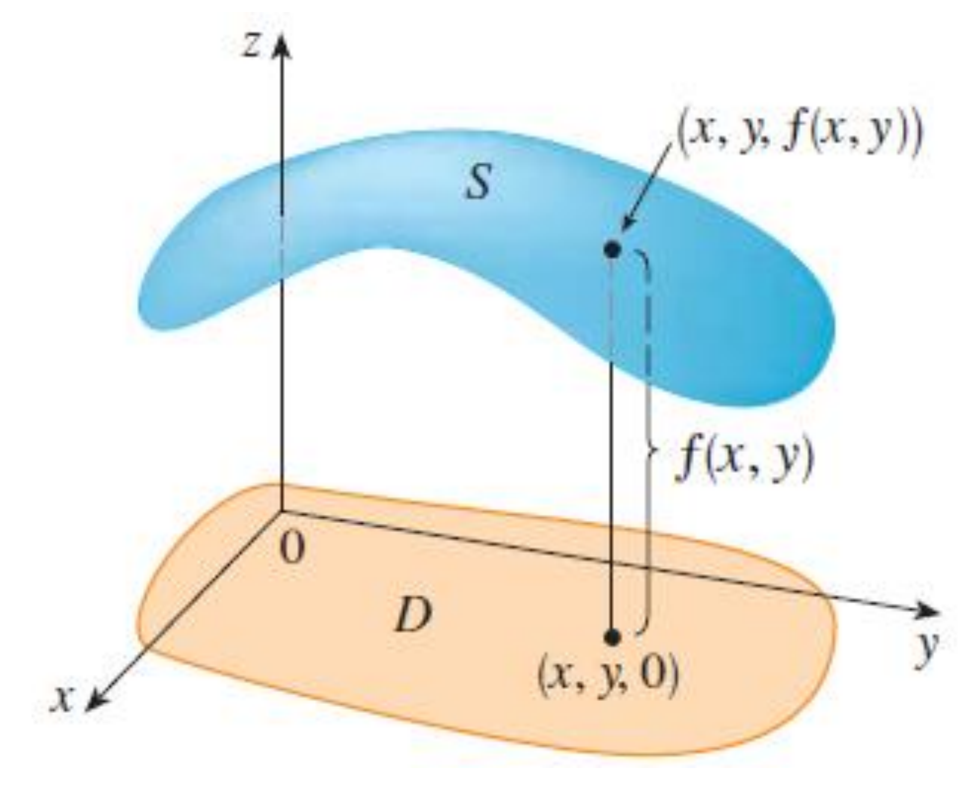
Solución



Gráfica de una función

Definición. Si f es una función de **dos variables** con dominio D, entonces la **gráfica** de f es el conjunto de los puntos $(x; y; z)$ en $\mathbb{R}^3$ tales que $z = f(x; y)$ y $(x; y)$ está en D.

Geométricamente se puede interpretar como una superficie en espacio.

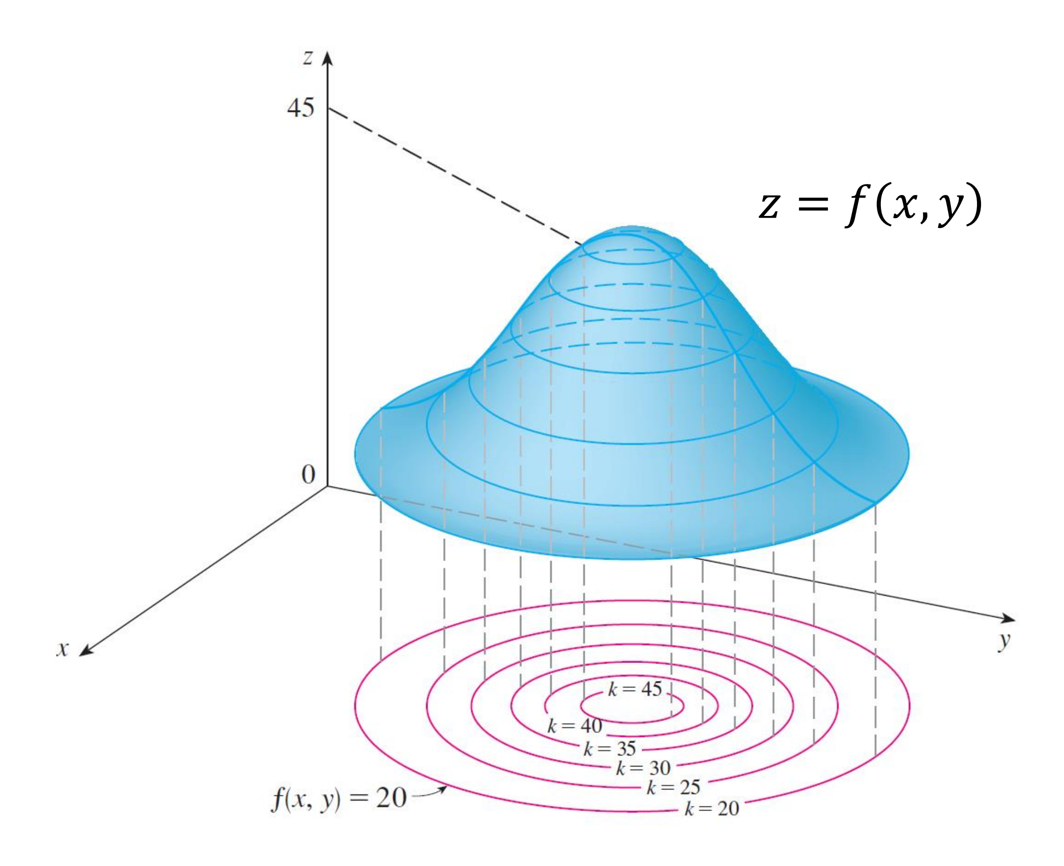


Ejemplo: describir la gráfica de $f(x, y) = \sqrt{16 - 4x^2 - y^2}$



Curvas de nivel

Definición. Las **curvas de nivel** de una función f de dos variables son las curvas cuyas ecuaciones son $f(x, y) = k$, donde k es una constante (en el rango de f)



Una curva de nivel $f(x, y) = k$ es el conjunto de todos los puntos en el dominio de f en el cual f toma un valor dado k.

Se interpreta como la proyección sobre el plano xy de intersección o traza de $z = f(x, y)$ y el plano $z = c$

Ejemplo 2. Dada la gráfica de la función f, definida por:

$$f(x;y) = 2\sqrt{x^2 + y^2}$$

a. Identifique la gráfica de la función.

b. Determine el dominio e imagen de la función f.

c. Identifique y represente **dos curvas de nivel** de la función.

Ejemplo 3. Determine en forma analítica el dominio de la función. Esboce la gráfica de su dominio y trace la curva de nivel cero.

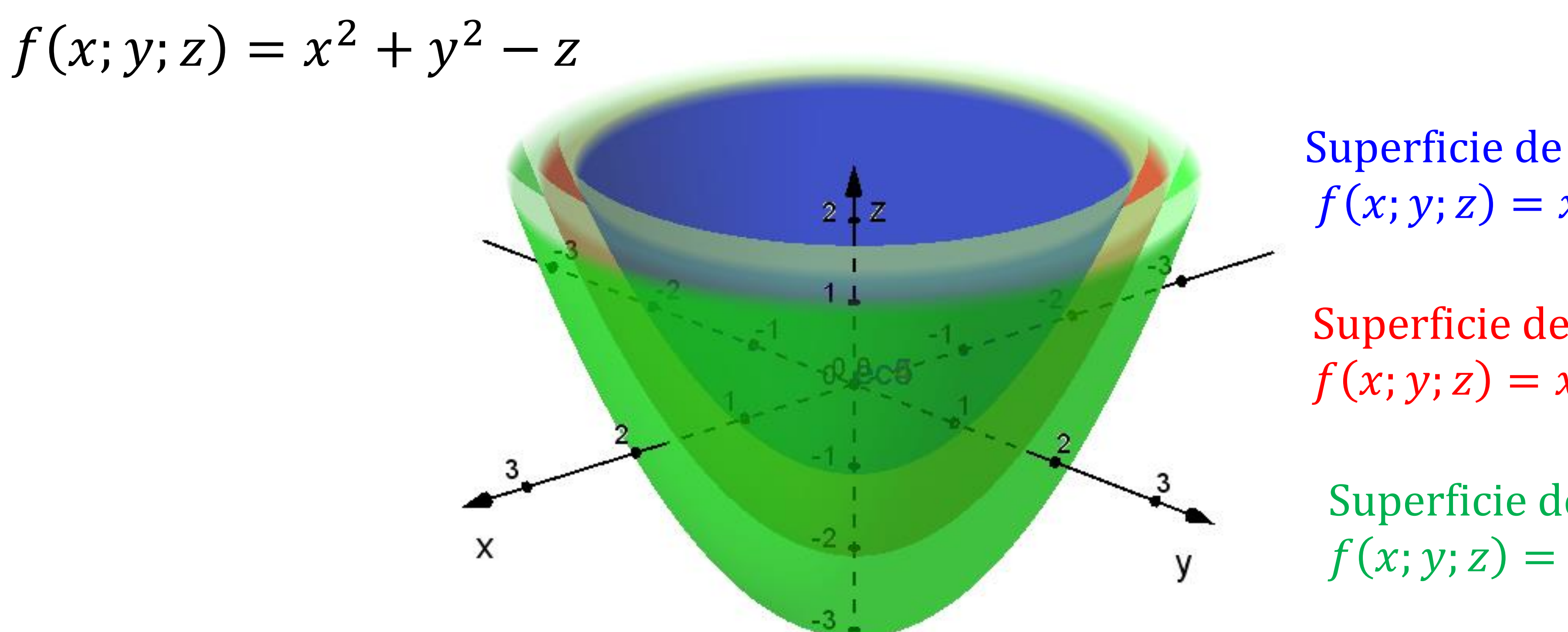
$$f(x;y) = \frac{\ln(2x - y - 4)}{\sqrt{x + 4 - y^2}}$$

Solución

Superficies de nivel

Definición. Las superficies de nivel de una función f de tres variables, son las superficies cuyas ecuaciones son $f(x;y;z)=k$, donde $k$es una constante (que pertenece al rango de f).

$$f(x;y;z)=x^2+y^2-z$$



Superficie de nivel **1**:
$f(x;y;z)=x^2+y^2-z=\mathbf{1}$

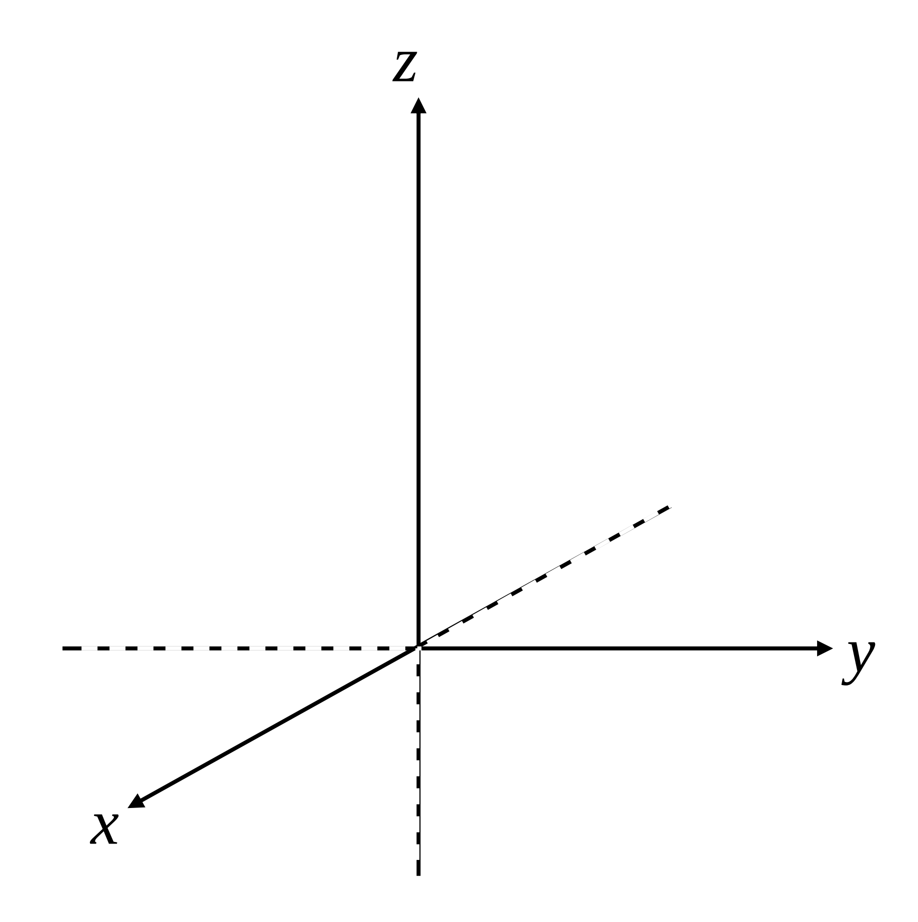
Superficie de nivel **2**:
$f(x;y;z)=x^2+y^2-z=\mathbf{2}$

Superficie de nivel **3**:
$f(x;y;z)=x^2+y^2-z=\mathbf{3}$

Ejemplo 5. Dada las función f, determine y grafique la superficie de nivel dos.

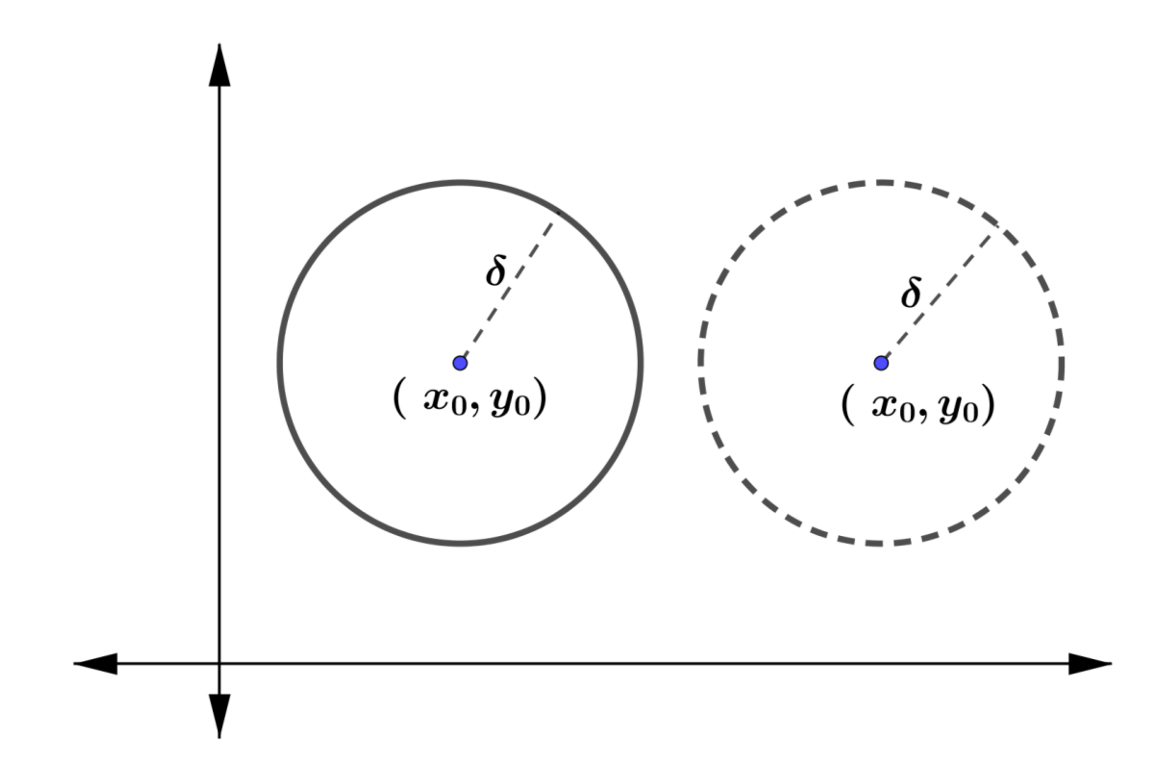
$$f(x; y; z) = \sqrt{16 - x^2 - y^2 - 4z^2}$$

Solución



LIMITES

- **disco abierto** $\{(x, y)\ |(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 < \delta^2\}$
- **disco cerrado** $\{(x, y)\ |(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 \leq \delta^2\}$



Definición del límite de una función de dos variables

Sea f una función de dos variables definidas, excepto posiblemente en (x_0, y_0), en un disco centrado en (x_0, y_0), y sea L un número real. Entonces

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = L$$

Si a cada $\varepsilon > 0$ le corresponde un $\delta > 0$ tal que

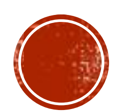
$$|f(x,y) - L| < \varepsilon \quad \text{siempre que} \quad 0 < \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} < \delta.$$

Definición de continuidad de una función de dos variables

Una función f de dos variables es **continua en un punto (x_0, y_0)** de una región abierta R si $f(x_0, y_0)$ es igual al límite de $f(x, y)$, cuando (x, y) tiende a (x_0, y_0). Es decir,

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = f(x_0,y_0).$$

La función f es **continua en la región abierta R** si es continua en todo punto de R.



EJERCICIOS

- Evalúe $\lim_{(x,y)\to(2,1)} \frac{x^2-y}{x-y}$
- Hallar $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2-xy}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}$
- Demostrar que $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2}$ no existe
- Demostrar que $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$ no existe
- Hallar $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{5x^2y}{x^2+y^2}$

